

中国科学院大学

2013 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

科目名称：量子力学

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、（共 30 分）质量为 μ 的粒子在一个无限深球方势阱

$$V(r) = \begin{cases} 0, & r \leq a \\ \infty, & r > a \end{cases}$$

中运动。

(1) 写出径向波函数 $R_l(r)$ 满足的方程（已知： $\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{\hat{l}^2}{\hbar^2 r^2}$ ）。

(2) 求其中 $l=0$ 的归一化能量本征函数和能量本征值。

二、（共 30 分）考虑一质量为 m 的自由粒子的一维运动。设初始 ($t=0$) 时刻波函

数为 $\psi(x,0) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{ik_0x - \alpha x^2/2}$ (k_0, α 为实常数； $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, $a > 0$)。

(1) 求 $t > 0$ 时刻动表象波函数 $\tilde{\psi}(k,t)$ 及粒子动量几率分布 $\Pi(k,t)$ 。

(2) 求 $t > 0$ 时刻波函数 $\Psi(x,t)$ 及粒子位置几率分布 $P(x,t)$ 。

(3) 简述粒子动量几率分布 $\Pi(k,t)$ 及位置几率分布 $P(x,t)$ 随时间演化的特性。

三、（共 30 分）一自旋为 $1/2$ 的粒子的归一化自旋态为 $|\lambda\rangle$ 。设自旋态 $|\lambda\rangle$ 下测量

自旋角动量 \hat{S}_z 得到 $\frac{\hbar}{2}$ 的几率是 $9/25$ ，测量 \hat{S}_x 得到 $\frac{\hbar}{2}$ 的几率是 $1/2$ 。

(1) 求自旋态 $|\lambda\rangle$ 。

(2) 求该自旋态下自旋角动量 \hat{S}_y 的平均值。

四、(共 30 分) 两个质量均为 m 的非全同粒子在一维无限深势阱

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \infty, & x > a \end{cases} \quad \text{中运动。}$$

- (1) 不考虑两个粒子间的相互作用, 求该体系的能级和归一化能量本征态。
(2) 设两个粒子之间的相互作用为

$$H(x_1, x_2) = \begin{cases} V, & (|x_2 - x_1| \leq b) \\ 0, & (|x_2 - x_1| > b) \end{cases}$$

其中 x_1 和 x_2 分别为两个粒子的坐标, $b \ll a$, V 为常数。以 H' 作为微扰, 求基态能量的一级修正, 结果只保留至 b/a 的一次项。

五、(共 30 分)

- (1) 考虑由两个自旋为 $\frac{1}{2}$ 的非全同粒子组成的系统, 两个粒子的自旋算符分别记为 \hat{S}_1 和 \hat{S}_2 。求系统总自旋算符 \hat{S}_{12}^2 、 $\hat{S}_{12,z}$ ($\hat{S}_{12} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2$) 的所有共同本征态和对应的本征值。
- (2) 考虑由三个自旋为 $\frac{1}{2}$ 的非全同粒子组成的系统, 第三个粒子的自旋记为 \hat{S}_3 。求总自旋算符 \hat{S}^2 、 \hat{S}_z ($\hat{S} = \hat{S}_{12} + \hat{S}_3$) 的所有共同本征态和对应的本征值。